数理解析研究所講究録
77巻 1969年 35-53



# von Neumann algebra 上の homomorphism について

東北大 理学部 武元英夫

## §1. 序

von Neumann algebra 上の homomorphisms の連続性について、uniform topology によるものと、σ-weak topology によるものが考えられる。uniform topology に対する Continuity の幾つかの結果が、Rickart, Johnson, Stein 等によって示されている。ここでは、von Neumann algebra から von Neumann algebra 上への homomorphism の σ-weak topology に対しての Continuity について、考えていくことにする。これらの研究に対して、多くの人の結果が知られているが、ここでは、竹崎氏、岡安氏の結果を用いて得られる性質を述べる事に議論を展開していく。

§2ではある種の von Neumann algebra 上から他の von Neumann algebra 上への homomorphism が常に σ-weakly continuous であることを示していく。

§3では、§2の結果をhomomorphismが$W^*$-representationになるかどうかという議論に応用して示される性質について述べている。特に、functionalの積分表現について、考えている。

以上の項目でもって話を展開していく。homomorphismについては、ことわらない限りはnot $*$-preservingと仮定して議論を展開していく。

## §2. von Neumann algebra上のhomomorphismsの連続性

このsectionでは次の結果を示すことに目的を置く。

定理。Mはseparable predual $M_*$をもつproperly infinite von Neumann algebraである。その時、Mからa von Neumann algebra N上への任意のhomomorphismは$\sigma$-weakly continuousとなる。

これを示すのに幾つかの性質を必要としている。そこで、それらの性質を述べてから定理の証明に入る。まず、補題1を示すが、これは竹崎氏（Theorem 7 in [16]）によって示されている性質ではあるが、ここで、それのsimple proofを与えている為に、証明をも述べておく。

補題1。Mは σ-finite, properly infinite von Neumann algebra, N は σ-finite von Neumann algebra であるとする。その時、M上からNの中への $*$-homomorphism $\pi$ は σ-weakly continuous となる。

証明。 Theorem 5 in [16] によって、$\pi$ は次の様に、$\pi$ の σ-weakly continuous part $\pi_1$ と $\pi$ の singular part $\pi_2$ によって、 $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$ によって分解される。

今、$\pi_2 \neq 0$ として議論を展開して矛盾を起せば良い。そこで、$\pi$ が singular であると仮定して矛盾を起せば良いということが分るので、$\pi$ が singular であると仮定する。

$\pi$ が singular であるから、N上の normal faithful positive linear functional $\psi$ が存在して、${}^t\pi(\psi) = \varphi$ が M 上の singular positive linear functional となる。[17] における singular positive linear functional の characterization と M が σ-finite であることから次の事柄が分る。

$\exists \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ ; orthogonal projections,

$$\sum_{n=1}^{\infty} e_n = 1, \quad \varphi(e_n) = 0 \quad \text{for all } n.$$

すると、 $0 = \varphi(e_n) = {}^t\pi(\psi)(e_n) = \psi(\pi(e_n))$

and. $\psi$ が faithful であるから、

$$\pi(e_n) = 0 \qquad \text{for all } n.$$

が成立する。

Mが properly infinite より、Mにおいて、$p_n \sim 1$ なる orthogonal projections の family $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する。ここで、$v_n^* v_n = p_n$, $v_n v_n^* = 1$ なる partial isometry $v_n$ に対して、orthogonal projections の family $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次の様に定義する：

$$q_n = v_n^*\Big(\sum_{k=1}^{n} e_k\Big) v_n .$$

$\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ を positive integers の increasing sequence とした時、次の性質が得られる；

$$q_{n_{i+1}} = v_{n_{i+1}}^*\Big(\sum_{k=1}^{n_{i+1}} e_k\Big) v_{n_{i+1}} \geq v_{n_{i+1}}^*\Big(\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} e_k\Big) v_{n_{i+1}} \sim \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} e_k$$

and

$$\sum_{i=1}^{\infty} q_{n_i} \gtrsim \sum_{k=n_1+1}^{\infty} e_k ,$$

$$\pi\Big(\sum_{i=1}^{\infty} q_{n_i}\Big) \gtrsim \pi\Big(\sum_{k=n_1+1}^{\infty} e_k\Big) = \pi\Big(1 - \sum_{k=1}^{n_1} e_k\Big) = \pi(1) \neq 0$$

故に、 $\pi\Big(\sum_{i=1}^{\infty} q_{n_i}\Big) \neq 0$ .

一方、 $\pi(q_n) = \pi(v_n)^*\Big(\sum_{k=1}^{n} \pi(e_k)\Big)\pi(v_n) = 0$ である。

今、$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ を rational numbers 全体の Countable set とする。その時、任意の real number $s$ に対して；

$\exists \{r_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \subset \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ ; infinite sequence

$0 < |r_{n_i} - s| < 1/i$ for all $i$

$n_j < n_i$ for $j < i$

そこで、$s$ に対して上の性質を満足する sequence $\{r_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ の index set $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ を対応させて考えると、$s \neq s'$ の時、$\{n_i\} \cap \{n_i'\}$ はせいぜい有限個となることは、簡単に分る。

今，$s \longleftrightarrow \{n_i\}$ に $g_s = \sum_{i=1}^{\infty} g_{n_i}$ と定義すると、今までの議論によって、もし $s \neq s'$ の時は $\pi(g_s g_{s'}) = \pi(g_s)\pi(g_{s'}) = 0$ そして、$\pi(g_s) \neq 0$ であることが分る。

従って，$R$ を real numbers 全体の集合とすると、$\{\pi(g_s)\ ;\ s \in R\}$ は互いに orthogonal な projections の set となる。しかし、$N$ が $\sigma$-finite であるから、この事は矛盾を生じさせていることになる。この矛盾は，$\pi$ が singular であると考えたことから起った分である。従って，$\pi$ が singular part を持たない，即ち，$\pi$ は $\sigma$-weakly continuous となる。

次に、後で必要の為に國安氏[8] の結果を証明なしで述べておこう。

補題2。$A$ を identity 1 をもつ $C^*$-algebra，$M$ を

von Neumann algebra とする。その時 $A$ 上から $M$ の上への任意の isomorphism $\pi$ は次の様な分解をもつ。

$$\pi = \pi_1 \circ \pi_2$$

ここで、$\pi_1$ は $M$ の inner automorphism で $\pi_2$ は $A$ 上から $M$ 上への $*$-isomorphism である。

補題2を考えることによって次の性質をもつ.

補題3、$M$ と $N$ を von Neumann algebras とする。その時、$M$ 上から $N$ 上への任意の $*$-homomorphism が $\sigma$-weakly continuous であるならば、$M$ 上から $N$ 上への任意の homomorphism は $\sigma$-weakly continuous となる。

証明。onto mapping 即ち、$\pi(M) = N$ であることと、Rickart's theorem によって、$\pi$ は uniformly continuous である。従って、$M/\pi^{-1}(0)$ は $C^*$-algebra となる。

今、$\delta$ を $M$ から $M/\pi^{-1}(0)$ 上への canonical mapping とし $\tilde{\pi}$ を $M/\pi^{-1}(0)$ から $N$ 上への $\pi$ によって induce される isomorphism とする。すると、補題2によって、$\tilde{\pi}$ は次の分解 $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}_1 \circ \tilde{\pi}_2$ (ここで $\tilde{\pi}_1$ は $N$ の inner automorphism、$\tilde{\pi}_2$ は $M/\pi^{-1}(0)$ から $N$ 上への $*$-isomorphim である)をもつ。

すると、 $\pi = \tilde{\pi} \circ \delta = \tilde{\pi}_1 \circ (\tilde{\pi}_2 \circ \delta)$ である。

そこで、$\tilde{\pi}_1$ が $N$ の inner automorphism であるから、σ-weakly continuous となる。更に、$\tilde{\pi}_2 \circ \delta$ が $M$ から $N$ 上への $*$-homomorphism であることと、仮定によって、$\tilde{\pi}_2 \circ \delta$ は σ-weakly continuous となる。従って、$\pi$ は σ-weakly continuous となる。

系。$M$ は σ-finite, properly infinite von Neumann algebra $N$ は σ-finite von Neumann algebra である。その時、$M$ から $N$ 上への任意の homomorphism は σ-weakly continuous となる。

以上の結果から定理の証明を得よう。

定理の証明。定理を証明するにあたって、補題1と補題3によって、$\pi$ は $*$-homomorphism であると仮定して定理を証明すれば良い。

$M$ の predual $M_*$ が separable であることから $\bar{\bar{M}} \leqq \mathfrak{c}$ である。次に、$N$ が σ-finite であることを証明しよう。もし $N$ が σ-finite でないとすれば、uncountable な orthogonal projections の family $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が $N$ の中に存在する。そこ

で $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ の subset に対して一つの projection が対応することを考えると、$\bar{\bar{N}}_p \gneqq c$ となることが分る。しかし、今、$\bar{\bar{M}} \geqq \bar{\bar{N}}$ であるから、これは矛盾を起す。

従って、$N$ は $\sigma$-finite であることが分る。

従って、$M$ から $N$ 上への任意の $*$-homomorphism が $\sigma$-weakly continuous になることは補題1によって分る、更に、補題3によって、$M$ から $N$ 上への任意の homomorphism が $\sigma$-weakly continuous になることが分る。以上をもって定理の証明を終る。

定理の応用については§3において述べることにする。

§3。von Neumann algebra の表現。

この section では§2の結果を表現が $W^*$-representation になるかという今までの事柄に応用して得られる性質を述べる。最初は次の形で、functional の積分表現について議論を進める。

定理。$M$ は Hilbert space $H$ 上に act している type 1 von Neumann algebra である。$Z$ は $M$ の center で、$X$ は $Z$ の spectrum を表わす。$\varphi$ は $M$ 上の reducible normal state である。その時、$\varphi$ は次の性質(1)−(3)を満す積分表現をもつ。

$$\varphi(a) = \int_X \varphi_\zeta(a)\, d\nu(\zeta) \qquad \text{for all} \quad a \in M.$$

ここで，$\nu$ は $\varphi|Z$ に対応する $X$ 上の spectral measure であり，$\zeta \in supp(\nu)$ に対して，$\varphi_\zeta$ は $M$ 上の state である。

(1) 写像 $\zeta \longrightarrow \varphi_\zeta$ は weakly continuous on $supp(\nu)$ である。

(2) $Z$ の元 $z$ と $M$ の元 $a$ に対して，$\varphi_\zeta(za) = z^\wedge(\zeta)\varphi_\zeta(a)$ が成立する。

(3) $\varphi_\zeta$ は factor state である。

上の定理を証明する為に幾つかの性質を述べて行こう。

$H$ 上に act している von Neumann algebra $M$ に対して $(M^*)^+ \ni \varphi$ が $\psi \in (M^*)^+$ を include しているとは $\exists \alpha > 0;\ \varphi - \alpha\psi \in (M^*)^+$ になることである。(Notation: $\psi \ll \varphi$) その時，

$$\psi \ll \varphi \quad \rightleftarrows \quad \forall \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M \ \ni\ \varphi(a_n^* a_n) \to 0 \quad \text{as } n \to \infty$$

$$\Rightarrow \ \psi(a_n^* a_n) \to 0 \quad \text{as } n \to \infty$$

であることは簡単に分る。

$\varphi \in (M^*)^+$ が reducible であるとは

$\forall \psi \in (M^*)^+$；$\psi \ll \varphi$ に対して $\exists a_0 \in M^+ ;\ \psi(a) = \varphi(aa_0)$ for all $a \in M$.

上の定義に対して normal reducible positive linear functional の extended notation を与えよう。

補題4。$\varphi \in (M_*)^+$ に対して、$e = \mathrm{supp}(\varphi)$ とおいた時、$\varphi$ が reducible であることと、$\varphi$ が $eMe$ 上の faithful normal trace であることは同値である。

これの証明は簡単である為に省略する。(cf. [15])

M における abelian projection $e$ に対して、$Z_{z(e)}$ から $eMe$ 上への $*$-isomorphism を $\Phi$ とした時、$\Phi$ によって定義される M から $Z_{z(e)}$ 上への linear mapping $\tau_e$ 即ち、$\tau_e(a) = \Phi^{-1}(eae)$ に対して state $\varphi_\zeta(a) = \tau_e(a)^\wedge(\zeta)$ は pure state である。これの証明は、$\{\sum_{i=1}^{n} a_i z_i \;;\; a_i \in M,\ z_i \in Z \text{ and } z_i^\wedge(\zeta) = 0\}$ の uniform closure によって得られる ideal $[\zeta]$ を使うことによって証明されるがここでは省略する。(cf. [15])

補題5。A は identity 1 をもつ $C^*$-algebra で、$\varphi$, $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ は A 上の positive linear functional で次の性質を満している。

(1) $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$, (2) $\exists \{e_i\}_{i=1}^{n} \subset A_p$ : orthogonal, $\varphi_i(1 - e_i) = 0$.

その時、$(\pi_\varphi, H_\varphi)$, $\{(\pi_i, H_i)\}_{i=1}^{n}$ を夫々、$\varphi$, $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ によって induce される A の canonical representation とすると、次の(1)-(4) の性質を満足する $H_\varphi$ の closed subspaces の family $\{K_i\}_{i=1}^{n}$ が存在する。

(1) for $i \neq j$, $K_i$ と $K_j$ は互いに直交する。

(2) $K_i \,\eta\, \pi_\varphi(A)'$, (3) $H_\varphi = \sum_{i=1}^{n} \oplus K_i$ (4) $\pi_\varphi | K_i \overset{(u)}{\cong} \pi_i$

証明。$(\ |\ )_\varphi$ と $(\ |\ )_i$ を夫々 $H_\varphi$ と $H_i$ における inner products とし $\xi_\varphi$ と $\xi_i$ を夫々に $\pi_\varphi(A)$ と $\pi_i(A)$ の cyclic vector とする。そこで、全ての $i$ に対して、$\varphi_i \leqq \varphi$ であるから

$\exists t_i \in \pi_\varphi(A)' : 0 \le t_i \le 1, \quad \varphi_i(b^*a) = (\pi_\varphi(a)t_i\xi_\varphi \mid \pi_\varphi(b)t_i\xi_\varphi)_\varphi$

が $A$ の全ての元 $a, b$ に対して成立する。

$I_\varphi$ と $I_i$ を夫々に $\varphi$ と $\varphi_i$ の left kernel とし、$\eta_\varphi$ と $\eta_i$ を夫々に $A$ から $A/I_\varphi$ と $A/I_i$ への canonical mapping とする。その時、

$(\eta_i(a) \mid \eta_i(b))_i = \varphi_i(b^*a) = (t_i\pi_\varphi(a)\xi_\varphi \mid t_i\pi_\varphi(b)\xi_\varphi)_\varphi$ for all $a, b \in A$.

$U_i$ を $\{\pi_i(A)\xi_i\}$ から $\{\pi_\varphi(A)\xi_\varphi\}$ の中への写像で、$U_i(\pi_i(a)\xi_i) = \pi_\varphi(a)t_i\xi_\varphi$ によって定義する。その時、$U_i$ は $H_i$ から $K_i = [\pi_\varphi(A)t_i\xi_\varphi] = \overline{t_i(H_\varphi)}$ 上への unitary operator に一意に拡張されることは明らかである。更に、$A$ の任意の元 $a$, $b$ に対して次が分る。

$U_i(\pi_i(a)\eta_i(b)) = U_i(\pi_i(ab)\xi_i) = \pi_\varphi(ab)t_i\xi_\varphi$

$\pi_\varphi(a)(U_i\eta_i(b)) = \pi_\varphi(a)U_i(\pi_i(b)\xi_i) = \pi_\varphi(a)\pi_\varphi(b)t_i\xi_\varphi = \pi_\varphi(ab)t_i\xi_\varphi$

従って、$\pi_\varphi | K_i \overset{(u)}{\cong} \pi_i$ である。

$\{K_i\}_{i=1}^n$ が互いに直交することと $H_\varphi = \sum_{i=1}^n \oplus K_i$ になることは次の事から分る。

$|\varphi_k((1-e_i)b^*ae_i)|^2 \le \varphi_k(a^*b(1-e_i)b^*a)\varphi_k(e_i)$

$\le \varphi_k(a^*b(1-e_i)b^*a)\varphi_k(1-e_k) = 0 \quad$ if $i \neq k$

and

$|\varphi_i((1-e_i)b^*ae_i)|^2 \le \varphi_i(1-e_i)\varphi_i(b^*ae_ia^*b) = 0$

従って、任意の $i$ に対して、$H_\varphi = \overline{\eta_\varphi(Ae_i)} \oplus \overline{\eta_\varphi(A(1-e_i))}$

and $\qquad K_i = supp(t_i) \subset \overline{\eta_\varphi(Ae_i)}$

更に、

$$(\eta_\varphi(a)|\eta_\varphi(b))_\varphi = \varphi(b^*a) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(b^*a) = \sum_{i=1}^n (t_i\pi_\varphi(a)\xi_\varphi | t_i\pi_\varphi(b)\xi_\varphi)_\varphi$$
$$= (\eta_\varphi(a)|(\sum_{i=1}^n t_i^2)\eta_\varphi(b)\xi_\varphi)_\varphi$$

従って、$\sum_{i=1}^n t_i^2 = 1$ が成立して、$H_\varphi = \sum_{i=1}^n \oplus K_i$ が成立する。

補題6。Aはidentity 1をもつ$C^*$-algebraとする。今，$\varphi \in (A^*)_1^+$，$\{\varphi_i\}_{i=1}^n \subset (A^*)^+$ が次の性質をもっていると仮定する。

(i) 全ての $i$ に対して $\varphi_i$ は pure である。

(ii) $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i$

(iii) $\exists \{e_i\}_{i=1}^n \subset A_p$ ; equivalent orthogonal projections

$\varphi_i(1-e_i)=0$ for all $i$, $\varphi_1(u_i^* a u_i) = \varphi_i(a)$ for all $a\in A$, $i=1,\cdots,n$

where $u_i^* u_i = e_1$, $u_i u_i^* = e_i$ .

その時，$\varphi$ は factor state である。

これの証明は $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ による表現 $\{(\pi_i, H_i)\}$ が互いに unitary equivalent になるということを示すことによって分る。そこで ここでは証明は省略する。

以上の事柄から定理の証明を進めよう。

定理の証明。$e$ は $\varphi$ の support を表わす。その時、補題4から $\varphi$ は $eMe$ 上の faithful normal trace である。従って $eMe$ は type I 且つ finite な von Neumann algebra である。従って、$Z_e$ の projections の family $\{e_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ が存在して、$e_{n_i}$ は $n_i$-homogeneous projection であり $\sum_{i=1}^{\infty} e_{n_i} = e$ となる。(今後、$e_{n_i}$ を $e_n$ で表わす。)

最初、$e=1$ と仮定する。そして、$Y_1$ は $Z$ の spectrum を表わす。更に、$X_n$ は $e_n$ に対応する $Y_1$ における clopen set である。(ここで、$Y_1$ を $X$ と異なって表わしたのは、後で $Y_1$ を $Z_e$ の spectrum として使用する為である。)

等式 $\sum_{n=1}^{\infty} e_n = 1$ から、$Y_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = N'$ は $Y_1$ における non-dense set である。そして、$Me_n$ が $n$-homogeneous であるから、equivalent abelian orthogonal projections の family $\{P_i^{(n)}\}_{i=1}^{n}$ が存在して、$\sum_{i=1}^{n} P_i^{(n)} = e_n$ が成立する。そこで、$Me_n = \mathfrak{A}_n \otimes B(H_n)$、ここで $\mathfrak{A}_n$ は abelian von Neumann algebra と書き、$Me_n$ において $P_i^{(n)} M P_i^{(n)}$ を考えることによって得られる page 10 で定義された $Z_{e_n}$ 上での写像を $\Phi_n$ とおく。更に、$u_i^{(n)*} u_i^{(n)} = P_1^{(n)}$, $u_i^{(n)} u_i^{(n)*} = P_i^{(n)}$ で $u_i^{(n)}$ を定義すると、$Me_n$ の元 $a$ に対して、$a = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i^{(n)} u_j^{(n)*}$ for $a_{ij} = \Phi_n^{-1}(P_1^{(n)} u_i^{(n)*} a u_j^{(n)} P_1^{(n)}) \in \mathfrak{A}_n$ が成立する。特に、$P_i^{(n)} a P_i^{(n)} = a_{ii} P_i^{(n)}$ が成立する。

そこで、$M$ の finiteness から、$Y_1$ 上の spectral measure $\mu$ に対して、

$$\varphi(a) = \varphi(a^{\natural}) = \int_{Y_1} a^{\natural\wedge}(\gamma)\, d\mu(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{X_n} a^{\natural\wedge}(\gamma)\, d\mu(\gamma) \text{ for } {}^{\forall} a \in M.$$

しかも、$supp(\mu)=Y_1$ となる。更に、$a\in M_{e_n}$ に対して、

$$\varphi(a)=\varphi(a^{\natural})=\int_{X_n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Phi_n^{-1}(P_i^{(n)}u_i^{(n)*}a\,u_i^{(n)}P_i^{(n)})\Big)^{\wedge}(\gamma)\,d\mu(\gamma)$$

議論を $eMe$ から $M$ に戻そう。$e=supp(\varphi)$ より、$\varphi(a)=\varphi(eae)$ が成立する。従って、

$$\varphi(a)=\varphi(eae)=\int_{Y_1}(eae)^{\natural e\wedge}(\gamma)\,d\mu(\gamma)\quad\text{for all } a\in M.$$

$Y$ は $z(e)$ に対応する $X$ における clopen set である。$Y_1$ は $Z_e$ の spectrum である。その時、写像 $Z_{z(e)}\ni a\longrightarrow ae\in Z_e$ によって $Z_{z(e)}$ と $Z_e$ は $*$-isomorphic になる。この $*$-isomorphism を $\pi$ とする。その時、${}^t\pi$ は $(Z_e)^*$ から $(Z_{z(e)})^*$ 上への order preserving linear isomorphism であり、且つ $Y_1$ から $Y$ への homeomorphism $f$ を induce する。更に、$Y$ から $Y_1$ への homeomorphism となる $f^{-1}$ を $\eta$ とする。そして、$\varphi_\zeta(a)=(eae)^{\natural e\wedge}(\eta(\zeta))$ によって $M$ 上の state $\varphi_\zeta$ を定義する。その時、$\varphi_\zeta(a)$ は $\zeta$ の函数として考えると、${}^t\pi((eae)^{\natural e\wedge}(\cdot))$ になっていることは明らかである。しかも、$Z\ni z$, $Y\ni\zeta$ に対して $\varphi_\zeta(za)=(ezae)^{\natural e\wedge}(\eta(\zeta))=z^{\wedge}(\zeta)\varphi_\zeta(a)$ が成立する。更に $\varphi_\zeta$ に対して、写像 $\zeta\longrightarrow\varphi_\zeta$ が weakly continuous であることは明らかである。今、${}^t\pi(\mu)=\nu\in C(Y)^*$ を定義する。その時、

$$\varphi(a)=\int_{Y_1}(eae)^{\natural e\wedge}(\gamma)\,d\mu(\gamma)=\int_Y\varphi_\zeta(a)\,d\nu(\zeta)\quad\text{for }{}^\forall a\in M.$$

更に、$\mathrm{supp}(\nu)=Y$ で $\nu$ は spectral measure on $Y$ である。

$N'$ が $Y_1$ において、non-dense set より、$f(N')=N$ は $Y$ において non-dense set である。そこで、$Y-N\ni\zeta$ に対して、$\eta(\zeta)\in X_n$ なる $n$ が存在する。その $n$ を fix して議論を進めて行こう。

$\varphi_{i\zeta}(a)=\frac{1}{n}\Phi_n^{-1}(p_1^{(n)}u_i^{(n)*}(e_n a e_n)u_i^{(n)}p_1^{(n)})^\wedge(\eta(\zeta))$ によって $M$ 上の positive linear functional $\varphi_{i\zeta}$ を定義する。その時、page 10 から $\varphi_{i\zeta}$ は pure である。しかも $\varphi_{i\zeta}(1-e_n)=0$ for $i=1,\cdots,n$ から、

$$\varphi_{i\zeta}(a)=\varphi_{i\zeta}(e_n a e_n) \qquad \text{for all } a\in M \ (i=1,\cdots,n).$$

$u_i^{(n)}$ の定義から、等式 $u_i^{(n)}e_n=e_n u_i^{(n)}$ が簡単に示される。従って

$$\begin{aligned}\varphi_{1\zeta}(u_i^{(n)*}a\,u_i^{(n)}) &= \frac{1}{n}\Phi_n^{-1}(p_1^{(n)}e_n(u_i^{(n)*}a\,u_i^{(n)})e_n\,p_1^{(n)})^\wedge(\eta(\zeta)) \\ &= \frac{1}{n}\Phi_n^{-1}(p_1^{(n)}u_i^{(n)*}(e_n a e_n)u_i^{(n)}p_1^{(n)})^\wedge(\eta(\zeta)) \\ &= \varphi_{i\zeta}(a) \qquad \text{for all } a\in M,\ i=1,\cdots,n.\end{aligned}$$

更に、各 $i$ に対して、$p_i^{(n)}$, $\varphi_{i\zeta}$ の定義から、$\varphi_{i\zeta}(1-p_i^{(n)})=0$ が成立する。しかも、$\{p_i^{(n)}\}$ は orthogonal 且つ equivalent な projections の family である。従って、補題6 から、$\varphi_\zeta$ は factor state である。

以上で定理の証明を終えたが、§2 の定理を使うことによって、$\varphi_\zeta$ はかならずしも $W^*$-representation を induce しない事が分る。そこで、これからそれを示すと共に他の色々な応用によって得られる性質を述べて行こう。

注意1。§2で定理して来たideal [ζ]に対して得られる$C^*$-algebra $M(\zeta)=M/[\zeta]$はGlimm [3]による概念である。そこで$M(\zeta)$が$W^*$-algebraになるかどうかということが考えられる分だが、これから、これはかならずしも$W^*$-algebraにならない事を示していこう。$\pi_\zeta$を$M$から$M(\zeta)$へのcanonical mappingとした時、$X\ni\zeta$に対して$\pi_\zeta^{-1}(0)\cap Z=\{z\in Z : z^\wedge(\zeta)=0\}$であることから、$\pi_\zeta$が$\sigma$-weakly continuousになる為には$\{\zeta\}$がclopen setになることが必要十分条件であることが分る。そこで、$M$として特に、separable predual $M_*$をもちしかも、center $Z$がnon-atomicなものをとって来ると、$\pi_\zeta$が$\sigma$-weakly continuousでない$\zeta\in X$が存在する。

上の性質を満足するvon Neumann algebra $M$の例を挙げる。$H$をcountably infinite dimensional Hilbert spaceとする。として、$M=L^\infty(0,1)\otimes B(H)$にとって来ると上の事柄の性質を満している事が分る。

同時に、§3の定理における$\varphi_\zeta$がかならずしも$W^*$-representationをもたない事も分る。しかも、その例として$M$は上と同じものであり、$\varphi$として次の様に構成すれば良い。

$e$をfinite dimensional projection on $H$とし、$\varphi'$を$N=L^\infty(0,1)\otimes eB(H)e$上のfaithful normal traceとする。そして、$\varphi(a)=\varphi'(eae)$ for each $a\in M$によって得られる$\varphi$

が求めるものとなることが分る。

注意2。§2の定理の応用として次の事も分る。$H$ を countably infinite dimensional Hilbert space とし，$C(H)$ を $H$ 上の completely continuous operators 全体から作られる $B(H)$ における ideal とする。その時，$B(H)/C(H)$ が $W^*$-algebra にならない事が分る。

REFERENCES

[1] J.W. Calkin, Two sided ideals and congruences in the rings of bounded operators in Hilbert space, Ann. of Math., 42(1941), 839-873.

[2] J. Dixmier, Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1957.

[3] J. Glimm, The Stone-Weierstrass Theorem for C*-algebras, Ann. of Math., 72(1960), 216-244.

[4] H. Halpern, An integral representation of normal functional on a von Neumann algebra, Trans. Amer. Math. Soc., 125 (1966), 32-46.

[5] B.E. Johnson, Continuity of homomorphisms of algebras of operators, Journal London Math. Soc., 42(1967), 537-541.

[6] R. Kadison, Irreducible operator algebras, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 43(1957), 273-276.

[7] L. Kaplansky, Representations of separable algebras, Duke Math. J., 19(1952), 219-222.

[8] T. Okayasu, A structure theorem of automorphiam of von Neumann algebras, Tôhoku Math. J., 20(1968), 199-206.

[9] C. Rickart, General thory of Banach algebras, Van Nostrand, New York, 1960.

[10] S. Sakai, The theory of W*-algebras, Lecture Note, Yale University, 1962.

[11] S. Sakai, A Radon-Nikodym theorem in W*-algebra, Bull. Amer Math Soc., 73(1965), 149-151.

[12] S. Sakai, On the central decomposition for positive functionals on C*-algebras, Trans. Amer. Math Soc. 118 (1965), 406-419.

[13] J.D. Stein, Homomorphisms of semi-simple algebras, Pac. J. of Math., 26(1968), 589-594.

[14] H. Takemoto, On the homomorphism of von Neumann algebra, Tôhoku Math. J., 21(1969), ~~237-248~~. 152-157.

[15] H. Takemoto, On the integral representation of some functional on a von Neumann algebra, Tôhoku Math. J. 21(1969) 237-248.

[16] M. Takesaki, On the conjugate space of operator algebra, Tôhoku Math. J., 10(1958),194-203.

[17] M. Takesaki, Singularity of positive linear functionals, Proc. Japan Acad., 36(1959), 365-366.

[18] J. Tomiyama, On the projection of norm one in W*-algebras, Proc. Japan Acad. 33(1957), 608-612.

[19] J. Tomiyama, On the projection of norm one in W*-algebras, III, Tôhoku Math. J., 11(1959), 125-129.

[20] F.B. Wright, A reduction for algebras of finite type, Ann. of Math., 60(1954), 560-570.